

## 1/ PRÉSENTATION DU SUJET

Ce sujet était composé de trois problèmes. Il balayait une grande partie du programme des deux années de TSI.

### Problème 1 - Suites et calcul matriciel

Ce premier problème portait sur l'étude de suites par une méthode de calcul matriciel. Il traitait de la réduction des matrices, en particulier de la trigonalisation dans l'ensemble des matrices réelles.

### Problème 2 - Une fonction définie à partir d'une intégrale

Ce problème traitait de l'étude par diverses méthodes d'une fonction définie par une intégrale. Il faisait appel aux connaissances sur l'intégrale généralisée et à diverses méthodes de calcul et d'encadrement afin de déterminer les caractéristiques principales de cette fonction.

### → Problème 3 - Étude d'un couple de variables aléatoires

L'objet de ce problème était l'étude d'une expérience aléatoire composée de deux étapes. Cette étude reposait sur des techniques usuelles de calcul des probabilités (probabilités conditionnelles, formule des probabilités totales, couple de variables aléatoires, etc.) et d'un point de vue calculatoire, sur l'utilisation de séries entières.

Le sujet était composé d'une alternance de questions de cours, calculatoires ou de réflexion. Il était d'une longueur raisonnable malgré le nombre important de questions. Chaque partie permettait d'interroger les candidats sur des notions importantes du programme.

En Algèbre, les calculs (déterminant, espaces propres, inverse d'une matrice, etc.) ont été dans une large mesure, très bien menés.

En Analyse, les intégrales généralisées ont posé problème à une partie des candidats, les calculs ont globalement été bien menés et les inégalités correctement manipulées.

La partie Probabilité est celle qui a posé le plus de problèmes, avec une séparation nette entre des candidats montrant une bonne maîtrise du sujet et d'autres ne connaissant pas les points élémentaires du cours. Cette partie a donc été moins réussie. Pourtant, une connaissance des éléments de base du cours (loi géométrique, formule des probabilités totales, définition de l'espérance) permettait de faire une bonne partie du problème.

Le sujet comportait de manière générale de nombreuses questions de cours ou d'application directe de celui-ci. Les copies des candidats montrant une connaissance correcte du cours ont donc été valorisées. Les correcteurs tiennent à souligner, même s'il s'agit peut-être d'une évidence, que cette connaissance est la condition indispensable à la réussite des étudiants pour l'épreuve de mathématiques. Les pratiques calculatoires sont bien sûr importantes, mais leur utilisation est souvent vaine s'il elle n'est pas adossée à une maîtrise des concepts de base.

Sur un autre plan, les correcteurs tiennent à souligner que les candidats doivent bien lire l'énoncé afin d'en comprendre les objectifs et d'en suivre le fil directeur. Ceci évite de refaire plusieurs fois la même démonstration ou d'utiliser une méthode fastidieuse alors que des raccourcis peuvent économiser des pages de calcul.

Enfin, même si le sujet ne comportait qu'une seule question de programmation, les correcteurs ont noté des efforts notables dans ce domaine.

## 2/ REMARQUES GÉNÉRALES

### ERREURS LES PLUS FRÉQUENTES

En Algèbre, les correcteurs ont constaté de fréquentes confusions entre diagonalisabilité, trigonalisabilité, symétrie, inversibilité ; ces propriétés ne sont pas interchangeables !

En Analyse, le cours n'est pas assez su par les candidats. De nombreuses questions de cours ont été mal, voire pas traitées (intégrales généralisées, développements en série entière usuels, etc.).

En Probabilités, les lois usuelles sont à apprendre et à utiliser correctement. Chaque loi est caractérisée par des situations (répétition finie/infinie d'une expérience de type Bernoulli, indépendance, etc.) qui permettent de l'identifier sans équivoque, et qui doivent être citées par les candidats.

Les erreurs spécifiques dans certains domaines du programme seront traitées en détail par la suite. Nous soulignons dans ce qui suit, les points généraux qui doivent globalement être améliorés :

- La présentation et la lisibilité sont satisfaisantes sur la plupart des copies. Les correcteurs tiennent à le souligner et à féliciter les candidats qui ont fait des efforts certains sur cet aspect. Une minorité d'irréductibles candidats continue cependant à adopter une présentation plus proche du brouillon que d'une copie de concours, à ne pas mettre en valeur leurs résultats, à ne pas traiter les questions dans l'ordre (ou à signaler des renvois clairs). De telles copies sont nécessairement jugées sévèrement.
- Une attention importante doit également être portée à l'orthographe, à la grammaire, à la conjugaison.
- La question de la rédaction est plus délicate et de nombreuses copies sont défailtantes sur ce point.
- Une réponse doit bien sûr être justifiée ; une réponse affirmative ou négative sans démonstration n'est pas recevable. Les correcteurs souhaitent également attirer fortement l'attention des candidats sur le fait qu'une réponse ne peut pas être uniquement un enchaînement de calculs, comme on le voit trop souvent. Ces calculs doivent être introduits par une phrase, même courte. Les variables doivent être déclarées, les enchaînements logiques soulignés par des mots de liaison, les questions dont on utilise un résultat, signalées explicitement. L'objectif est bien sûr de rendre la copie agréable à lire pour le correcteur, mais plus fondamentalement, de structurer le raisonnement des étudiants.

La qualité de cette rédaction marque souvent la différence entre une copie correcte et une très bonne copie.

Enfin, nous terminons sur un point plus marginal mais qui peut agacer énormément le correcteur. Afin que les candidats ne soient pas bloqués lorsqu'ils ne réussissent pas une question, de nombreux résultats intermédiaires sont fournis par l'énoncé. Certains candidats en profitent pour se contenter de réécrire la formule à démontrer affublée d'un vague argument, ou bien pour trafiquer leurs calculs afin d'arriver au résultat annoncé. Ces cas, minoritaires, sont appréciés et traités à leur juste valeur par les correcteurs.

### **3/ RAPPORT DÉTAILLÉ**

### PROBLÈME 3 / Partie I - Quelques résultats préliminaires sur les séries entières

**Q31,32,33.** Il s'agit de questions élémentaires de cours sur les séries entières. Or, de trop nombreuses copies fournissent des réponses fausses ou approximatives (intervalle au lieu du rayon, confusion avec les développements limités, somme partielle au lieu de la somme, etc.).

### PROBLÈME 3 / Partie II - Loi et espérance de $X$

**Q34.** Cette question marque le tournant vers la partie « probabilités » du problème. Celui-ci s'avère périlleux sur une partie importante des copies.

Concernant la loi demandée, certains candidats fournissent des réponses farfelues (loi binomiale, Bernoulli) à ce qui est pourtant une question de cours !

Par ailleurs, il est impératif de justifier pourquoi la loi est géométrique : répétition d'expériences identiques de type Bernoulli, de façon indépendante, jusqu'à l'apparition d'un premier succès.

**Q35.** Au-delà du calcul souvent bien effectué, une justification de l'existence de l'espérance par la convergence absolue de la série était attendue.

### PROBLÈME 3 / Partie III - Loi de $N$

**Q36.** Cette question est souvent mal comprise par les candidats dont la réponse comprend fréquemment un «  $n$  », ce qui est incohérent ici.

**Q37.** Le traitement de cette question a reflété la bonne compréhension de l'énoncé (ou non) par les candidats.

**Q38.** Il faut ici citer la formule des probabilités totales ainsi que le système complet d'événements utilisé.

**Q39.** Trop peu de candidats ont vu le lien avec la question 33.

### PROBLÈME 3 / Partie IV - Étude de l'indépendance de $X$ et $N$

**Q40.** De nombreux candidats répondent à cette question de manière très imprécise (en particulier avec une confusion entre événement et variable aléatoire).

**Q41.** Cette question a régulièrement été bien traitée. Une proportion non négligeable des candidats perd son temps à (mal) calculer la valeur exacte de  $P(N = 2)$ , pourtant non demandée, et n'aboutit pas.

**Q42.** Cette question révélait également la bonne compréhension (ou non) de l'ensemble du problème. Une justification de la nullité de la probabilité de l'intersection ainsi que de la dépendance étaient attendues.

### PROBLÈME 3 / Partie V - Espérance de $N$

**Q43,44,45.** Ces questions étaient assez techniques et n'ont été bien traitées que sur les meilleures copies. Là encore, une justification précise de l'existence de l'espérance par la convergence absolue d'une série était attendue.

**Q46.** L'inégalité entre les espérances a été souvent correctement démontrée, en étudiant le signe de la différence. En revanche, la partie sur la prévisibilité du résultat a donné lieu à des justifications douteuses. Ce qui était attendu était la remarque suivante (informelle car l'inégalité nécessaire n'est pas au programme). Pour chaque tirage, la valeur de  $N$  était inférieure ou égale à celle de  $X$ . Comme l'espérance représente la moyenne, il est logique que l'on ait également l'espérance de  $N$  inférieure ou égale à celle de  $X$ .

## 4/ CONCLUSION

Les points qui ressortent de ce rapport sont classiques mais méritent d'être répétés.

Au-delà du calcul, la maîtrise du cours et la précision dans son application sont indispensables à la réussite de cette épreuve de mathématiques. La clarté et la cohérence de la copie sont des éléments importants d'appréciation.

Comme c'est l'usage, les remarques faites dans ce rapport insistent, la plupart du temps, sur les lacunes des candidats. Les correcteurs tiennent néanmoins à souligner avoir constaté, dans un nombre important de copies, une connaissance satisfaisante du cours et une bonne qualité des raisonnements. De très bonnes copies ont de plus révélé des techniques de démonstration maîtrisées et une réelle efficacité dans la rédaction. Nous invitons tous les futurs candidats à poursuivre leur travail afin d'atteindre ces objectifs.